数理解析研究所講究録
491巻 1983年 135-138

指数マルチンゲールの一様可積分性について

富山大理 風巻 紀彦 (Norihiko Kazamaki)
富山大理 関口 健 (Takeshi Sekiguchi)

指数マルチンゲールが、一様可積分マルチンゲールとなるための、いくつかの判定条件は、Novikov, 風巻等により与えられている。ここでは、彼等の結果を改良した、新しい十分条件について報告する。詳しくは、次の論文

N. Kazamaki and T. Sekiguchi, *Uniform integrability of continuous exponential martingales*, Tôhoku Math. J. 35 (1983)

を参照せよ。

$M = (M_t)_{t \geq 0}$ を連続マルチンゲールで、$M_0 = 0$ をみたすとする。このとき指数マルチンゲール $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ は、

$$Z_t = \exp\left\{ M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t \right\}, \quad t \geq 0,$$

により定義される局所マルチンゲールである。ここで $\langle M\rangle$ は M に随伴する連続増加過程とする。

$\varphi(0)=0$ をみたす連続関数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ と実数 α に対し

$$G_t(\alpha,\varphi)=\exp\{\alpha M_t+(\tfrac{1}{2}-\alpha)\langle M\rangle_t-|1-\alpha|\varphi(\langle M\rangle_t)\},$$

$$g(\alpha,\varphi)=\sup_{T\in\mathcal{T}_b}E[G_T(\alpha,\varphi)]$$

とおく。ここで $\mathcal{T}_b$ は有界な停止時の全体とする。

また、原点から出発する Brown 運動 $B=(B_t)_{t\geq 0}$ に対し

$$P(B_t<\varphi(t),\ t\to\infty)=0$$

となるとき、φ を下級関数という。

定理　φ を下級関数とする。ある $\alpha\neq 1$ に対して $g(\alpha,\varphi)<\infty$ ならば、Z は一様可積分マルチンゲールである。

証明の概略　連続な時刻変更により

$$M_t=B_{t\wedge\zeta},\quad t\geq 0,$$

と仮定してよい。ここで $B=(B_t)_{t\geq 0}$ は Brown 運動で、ζ は停止時である。

最初に $\alpha < 1$ の場合を考える。

$$\tau_j = \inf\{ t \geq 0 \,;\, B_t \leq t - \varphi(t) - j \} , \qquad j = 1, 2, \cdots$$
$$\tilde{\tau}_j = \inf\{ t \geq 0 \,;\, B_t \leq -\varphi(t) - j \} ,$$

とおく。 このとき、Brown 運動の性質を用いて、次のことが言える。

$$E[\exp(B_{\tau_j} - \tfrac{1}{2}\tau_j) \,;\, \tau_j < \infty] = P(\tilde{\tau}_j < \infty) .$$

φ が下級関数である $\Longleftrightarrow$ 各 j について $P(\tilde{\tau}_j < \infty) = 1$。

このことから、等式

$$1 = E[\exp(B_{\tau_j \wedge \zeta} - \tfrac{1}{2}\tau_j \wedge \zeta)]$$
$$= E[\exp(B_\zeta - \tfrac{1}{2}\zeta) \,;\, \tau_j \geq \zeta] + E[\exp(B_{\tau_j} - \tfrac{1}{2}\tau_j) ; \tau_j < \zeta]$$

を得る。 明らかに

$$E[\exp(B_{\tau_j \wedge \zeta} - \tfrac{1}{2}\tau_j \wedge \zeta)] \leq E[Z_\infty] .$$

また τ_j の定義より、 $\{\tau_j < \infty\}$ 上で

$$B_{\tau_j} - \tfrac{1}{2}\tau_j = \alpha B_{\tau_j} + (\tfrac{1}{2} - \alpha)\tau_j - (1-\alpha)\varphi(\tau_j) - (1-\alpha) j$$

だから

$$E[\exp(B_{\tau_j} - \tfrac{1}{2}\tau_j) \,;\, \tau_j < \zeta] \leq E[G_{\tau_j}(\alpha, \varphi)\, e^{-(1-\alpha) j} \,;\, \tau_j < \infty]$$

$$\leqslant g(\alpha,\varphi)\, e^{-(1-\alpha)j} \quad 。$$

したがって $j \to \infty$ として $E[Z_\infty] \geqslant 1$ を得る。すなわち、Z は一様可積分マルチンゲールである。

$\alpha > 1$ の場合は、τ_j と $\tilde{\tau}_j$ の代りに

$$\nu_j = \inf\{t \geqslant 0 \,;\ B_t \geqslant t + \varphi(t) + j\} \ ,$$

$$\tilde{\nu}_j = \inf\{t \geqslant 0 \,;\ B_t \geqslant \varphi(t) + j\}$$

を用いて、同様に示すことができる。

注意. 定理の条件の特別な場合として、例えば $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは Novikov の判定条件を、$0 \leqslant \alpha < 1$, $\varphi = 0$ のときは Lépingle - Mémin の判定条件を得る。更に、我々の条件は、彼等の条件を真に含むことも言えるが、十分条件でないことも確めることができる。